Dipartimento di Matematica per le scienze economiche e sociali Università di Bologna

Matematica aa 2008-2009

lezione 5 26 novembre 2008

professor Daniele Ritelli

www.unibo.it/docenti/daniele.ritelli

Una funzione da A a B è biiettiva quando è sia iniettiva sia suriettiva.

Una funzione biiettiva viene anche chiamata **biiezione** o **corrispondenza biunivoca** fra A e B. In simboli:

$$\boldsymbol{f : A \leftrightarrow B.}$$

Ogni elemento di A è l'immagine di uno e un solo elemento di B e *viceversa*

La funzione inversa

La funzione inversa

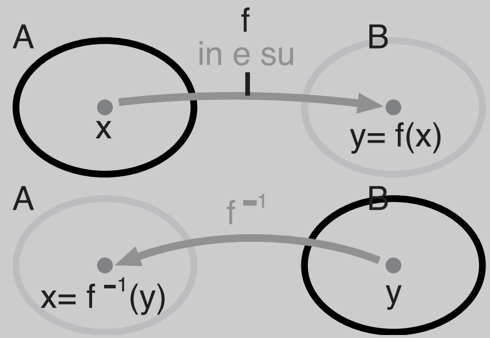
Sia $f : A \to B$ una funzione biiettiva tale che ogni x in A ha per immagine $y = f(x)$ in B.

La funzione inversa

Sia $f : A \to B$ una funzione biiettiva tale che ogni x in A ha per immagine $y = f(x)$ in B. La funzione inversa di f è la funzione biiettiva $f^{-1} : B \to A$ tale che ogni y in B ha per immagine $x = f^{-1}(y)$ in A.

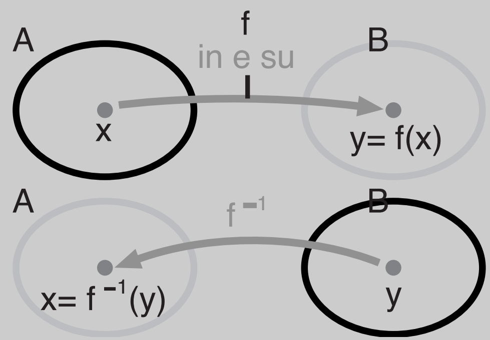
La funzione inversa

Sia $f : A \to B$ una funzione biiettiva tale che ogni x in A ha per immagine $y = f(x)$ in B. La funzione inversa di f è la funzione biiettiva $f^{-1} : B \to A$ tale che ogni y in B ha per immagine $x = f^{-1}(y)$ in A.



La funzione inversa

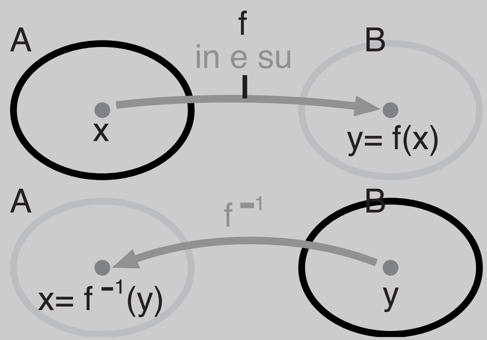
Sia $f : A \to B$ una funzione biiettiva tale che ogni x in A ha per immagine $y = f(x)$ in B. La funzione inversa di f è la funzione biiettiva $f^{-1} : B \to A$ tale che ogni y in B ha per immagine $x = f^{-1}(y)$ in A.



Dunque, se una funzione è indicata con f, la sua funzione inversa viene indicata col simbolo f^{-1}.

La funzione inversa

Sia $f : A \to B$ una funzione biiettiva tale che ogni x in A ha per immagine $y = f(x)$ in B. La funzione inversa di f è la funzione biiettiva $f^{-1} : B \to A$ tale che ogni y in B ha per immagine $x = f^{-1}(y)$ in A.

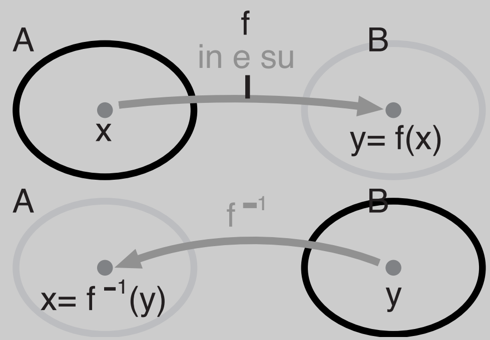


Dunque, se una funzione è indicata con f, la sua funzione inversa viene indicata col simbolo f^{-1}.

$$\boldsymbol{f : A \to B,}$$

La funzione inversa

Sia $f : A \to B$ una funzione biiettiva tale che ogni x in A ha per immagine $y = f(x)$ in B. La funzione inversa di f è la funzione biiettiva $f^{-1} : B \to A$ tale che ogni y in B ha per immagine $x = f^{-1}(y)$ in A.



Dunque, se una funzione è indicata con f, la sua funzione inversa viene indicata col simbolo f^{-1}.

$$\boldsymbol{f : A \to B, \qquad f^{-1} : B \to A.}$$

Consideriamo la funzione biiettiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

Consideriamo la funzione biiettiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\boldsymbol{f(x) = y = 2x - 1}$$

Consideriamo la funzione biiettiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\boldsymbol{f(x) = y = 2x - 1}$$

Possiamo ottenere la sua inversa $f^{-1}(x)$ nel seguente modo:

Consideriamo la funzione biiettiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\boldsymbol{f(x) = y = 2x - 1}$$

Possiamo ottenere la sua inversa $f^{-1}(x)$ nel seguente modo:

- ricaviamo x in funzione di y dalla relazione precedente:

Consideriamo la funzione biiettiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\boldsymbol{f(x) = y = 2x - 1}$$

Possiamo ottenere la sua inversa $f^{-1}(x)$ nel seguente modo:

- ricaviamo x in funzione di y dalla relazione precedente:

$$\boldsymbol{x = \frac{y+1}{2}}$$

Consideriamo la funzione biiettiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\boldsymbol{f(x) = y = 2x - 1}$$

Possiamo ottenere la sua inversa $f^{-1}(x)$ nel seguente modo:

• ricaviamo x in funzione di y dalla relazione precedente:

$$\boldsymbol{x = \frac{y+1}{2}}$$

• indichiamo con y la variabile dipendente e con x quella indipendente, ossia scambiamo x con y:

Consideriamo la funzione biiettiva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\boldsymbol{f(x) = y = 2x - 1}$$

Possiamo ottenere la sua inversa $f^{-1}(x)$ nel seguente modo:

• ricaviamo x in funzione di y dalla relazione precedente:

$$\boldsymbol{x = \frac{y+1}{2}}$$

• indichiamo con y la variabile dipendente e con x quella indipendente, ossia scambiamo x con y:

$$\boldsymbol{f^{-1}(x) = y = \frac{x+1}{2}}$$

Il grafico di una funzione reale di una variabile reale e quello della sua inversa sono sempre simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Il grafico di una funzione reale di una variabile reale e quello della sua inversa sono sempre simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Infatti, se un punto $A(x; y)$ appartiene al grafico della funzione, al grafico della funzione inversa appartiene il punto $A^{-1}(y; x)$

Grafico di $y = ax^2$ con $a > 0$

Grafico di $y = ax^2$ con $a > 0$

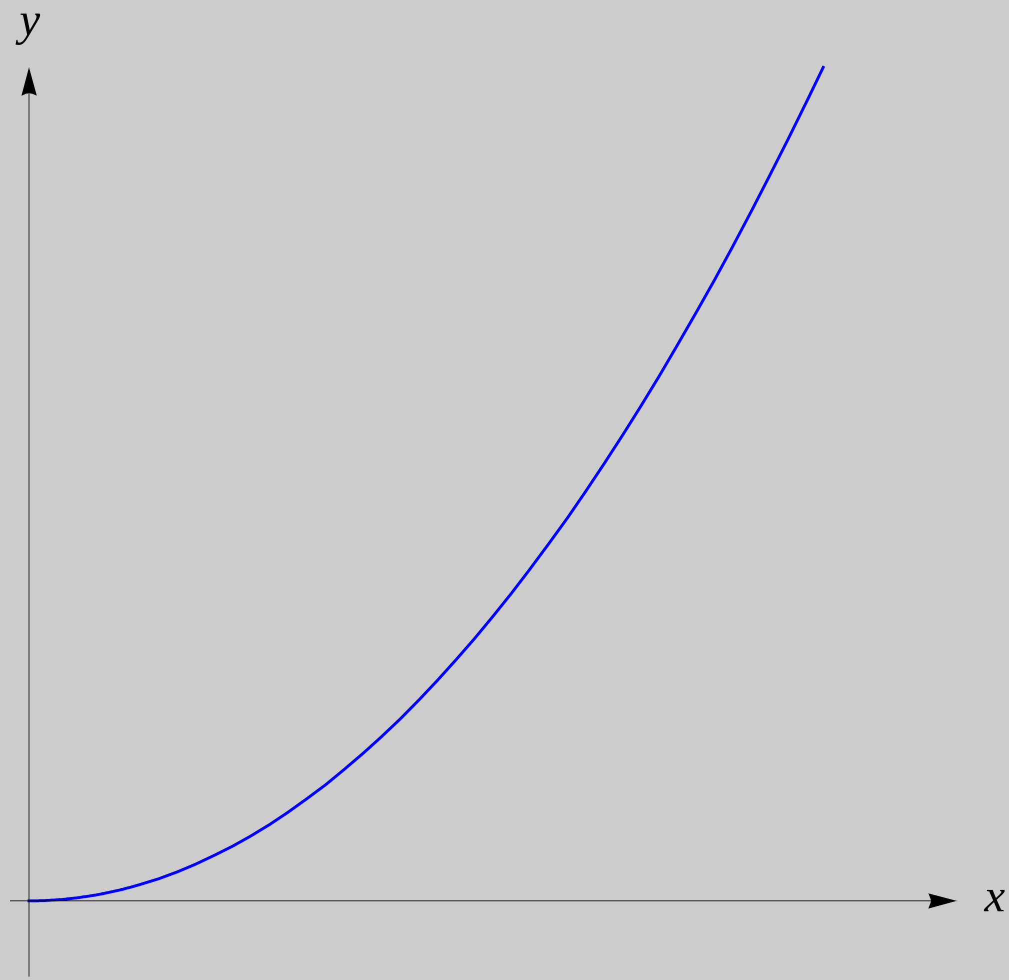
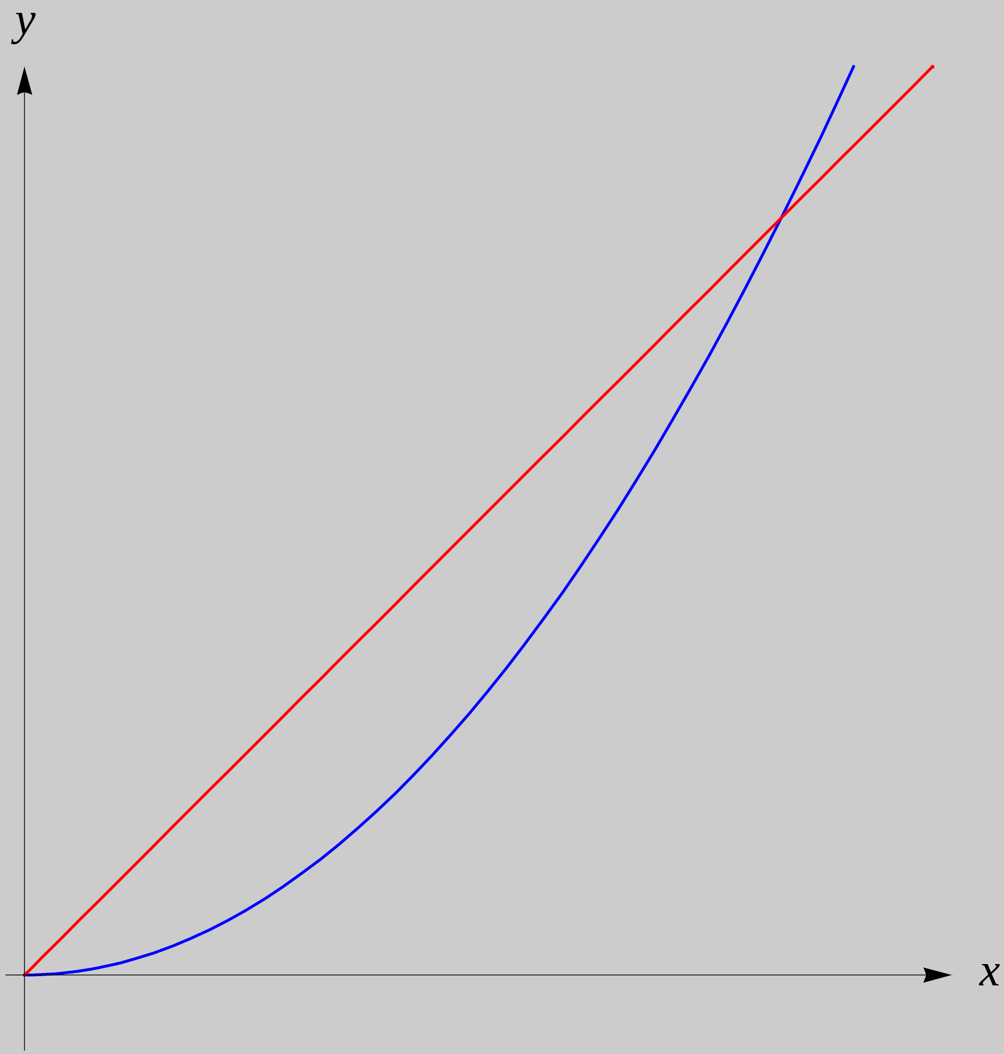
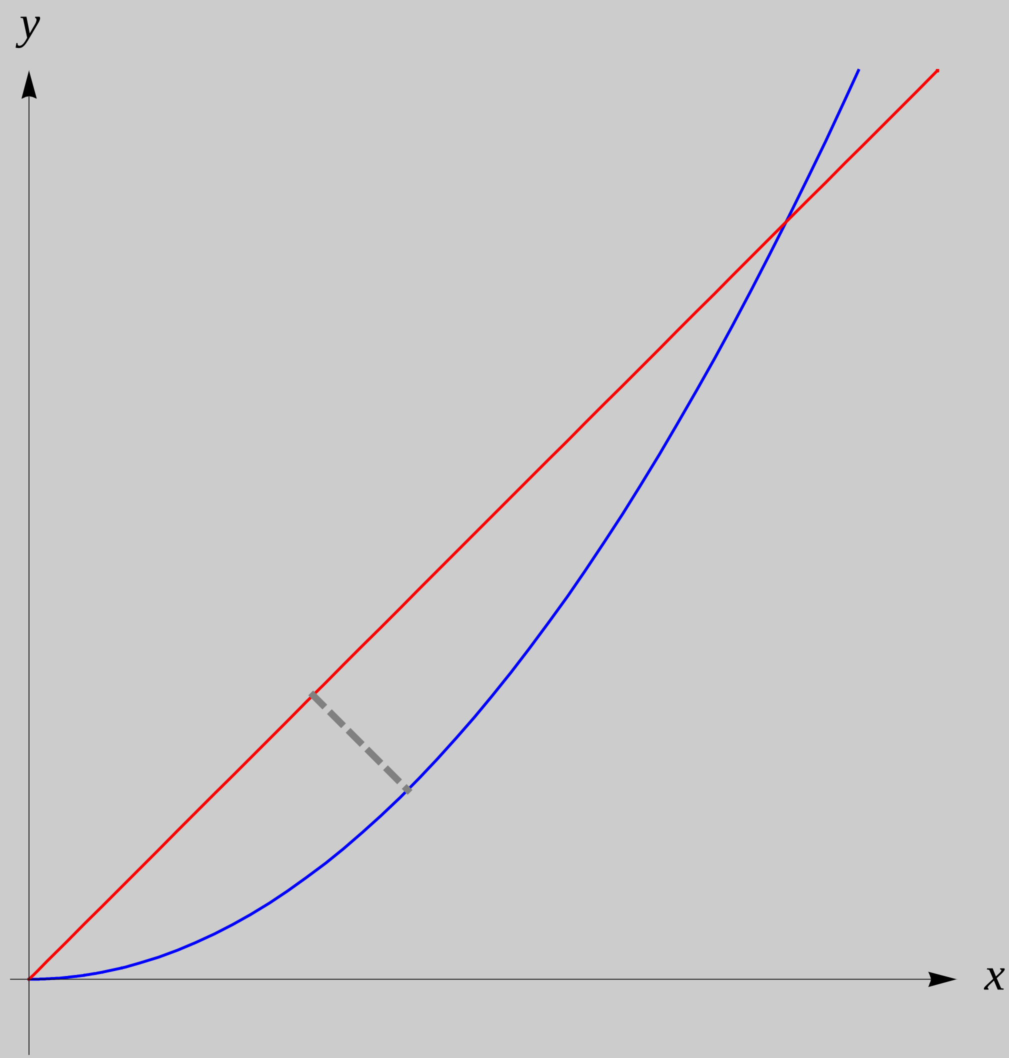


Grafico di $y = ax^2$ con $a > 0$ assieme alla bistettrice $y = x$

Grafico di $y = ax^2$ con $a > 0$ assieme alla bistettrice $y = x$



costruzione punto simmetrico



costruzione punto simmetrico

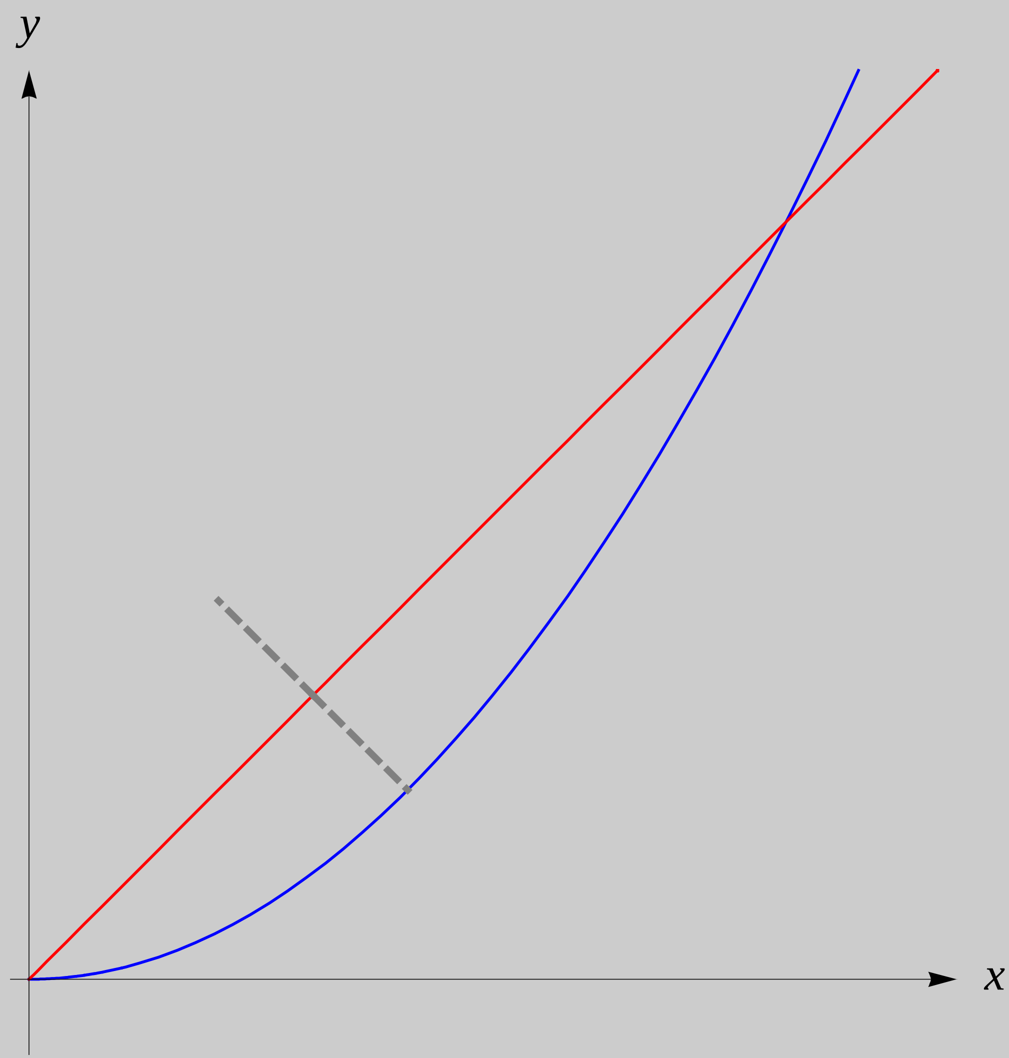
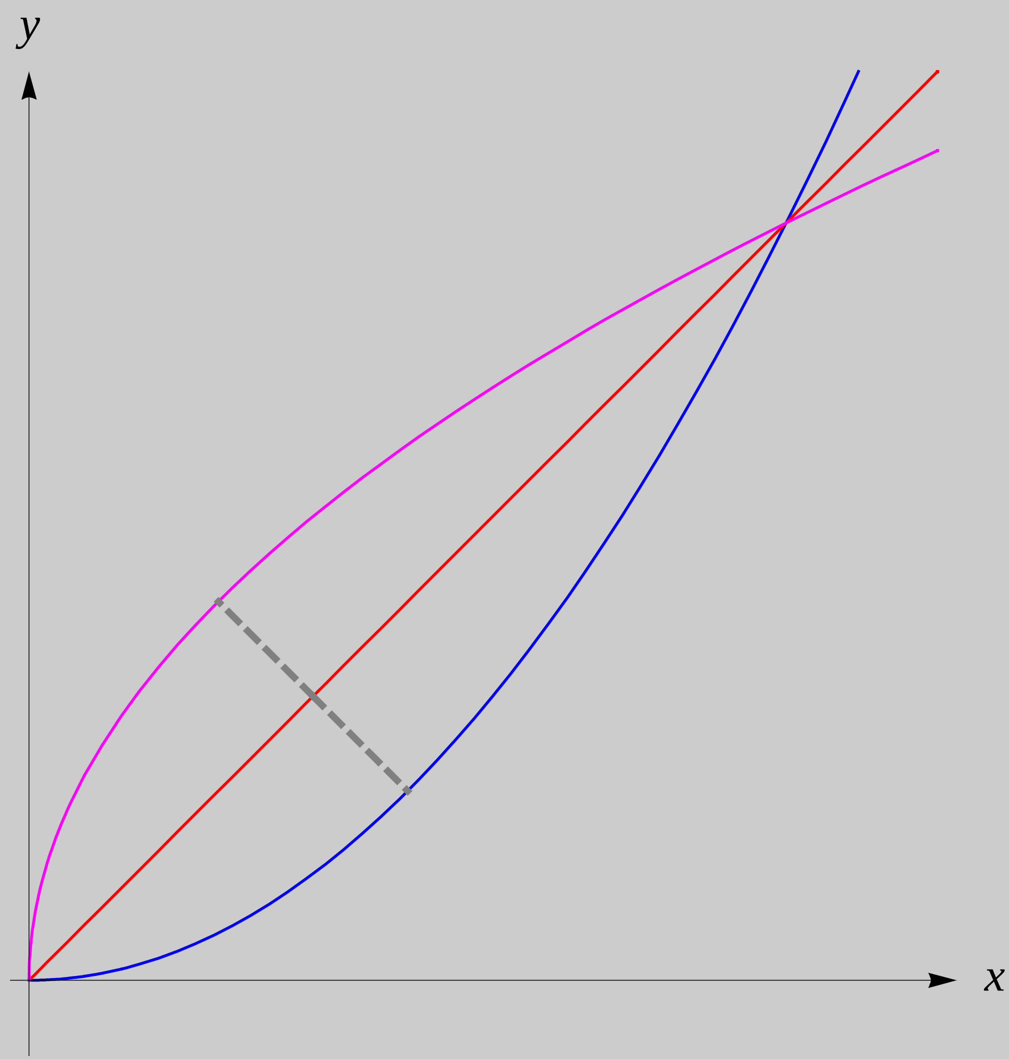


grafico inversa



Composizione di funzioni

Consideriamo le funzioni reali di una variabile reale f e g così definite:

Composizione di funzioni

Consideriamo le funzioni reali di una variabile reale f e g così definite:

$$f(x) = 2x - 1,$$

Composizione di funzioni

Consideriamo le funzioni reali di una variabile reale f e g così definite:

$$f(x) = 2x - 1,$$

$$g(x) = -x^2 + 3.$$

Composizione di funzioni

Consideriamo le funzioni reali di una variabile reale f e g così definite:

$$f(x) = 2x - 1,$$

$$g(x) = -x^2 + 3.$$

Applichiamo la f a un valore qualsiasi, per esempio 3, in modo da ottenere la sua immagine:

Composizione di funzioni

Consideriamo le funzioni reali di una variabile reale f e g così definite:

$$f(x) = 2x - 1,$$

$$g(x) = -x^2 + 3.$$

Applichiamo la f a un valore qualsiasi, per esempio 3, in modo da ottenere la sua immagine:

$$f(3) = 2 \times 3 - 1$$

Composizione di funzioni

Consideriamo le funzioni reali di una variabile reale f e g così definite:

$$f(x) = 2x - 1,$$
$$g(x) = -x^2 + 3.$$

Applichiamo la f a un valore qualsiasi, per esempio 3, in modo da ottenere la sua immagine:

$$f(3) = 2 \times 3 - 1 = 5.$$

Composizione di funzioni

Consideriamo le funzioni reali di una variabile reale f e g così definite:

$$f(x) = 2x - 1,$$
$$g(x) = -x^2 + 3.$$

Applichiamo la f a un valore qualsiasi, per esempio 3, in modo da ottenere la sua immagine:

$$f(3) = 2 \times 3 - 1 = 5.$$

Al valore ottenuto applichiamo la funzione g:

Composizione di funzioni

Consideriamo le funzioni reali di una variabile reale f e g così definite:

$$f(x) = 2x - 1,$$
$$g(x) = -x^2 + 3.$$

Applichiamo la f a un valore qualsiasi, per esempio 3, in modo da ottenere la sua immagine:

$$f(3) = 2 \times 3 - 1 = 5.$$

Al valore ottenuto applichiamo la funzione g:

$$g(5) = -5^2 + 3$$

Composizione di funzioni

Consideriamo le funzioni reali di una variabile reale f e g così definite:

$$f(x) = 2x - 1,$$
$$g(x) = -x^2 + 3.$$

Applichiamo la f a un valore qualsiasi, per esempio 3, in modo da ottenere la sua immagine:

$$f(3) = 2 \times 3 - 1 = 5.$$

Al valore ottenuto applichiamo la funzione g:

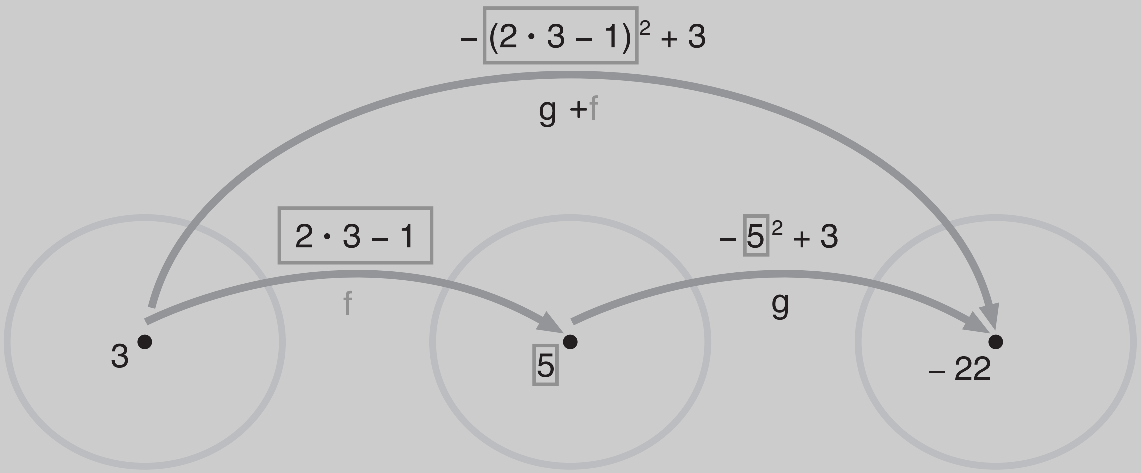
$$g(5) = -5^2 + 3 = -22.$$

Al valore iniziale 3 abbiamo associato uno e un solo valore, -22, ottenendo una nuova funzione che chiamiamo

Al valore iniziale 3 abbiamo associato uno e un solo valore, -22, ottenendo una nuova funzione che chiamiamo **funzione composta di f e g**

Al valore iniziale 3 abbiamo associato uno e un solo valore, -22, ottenendo una nuova funzione che chiamiamo **funzione composta di f e g** e indichiamo con $g \circ f$ o con $g(f(x))$.

Al valore iniziale 3 abbiamo associato uno e un solo valore, -22, ottenendo una nuova funzione che chiamiamo **funzione composta di f e g** e indichiamo con $g \circ f$ o con $g(f(x))$.



Per ottenere l'espressione analitica della funzione composta, ripetiamo il procedimento precedente utilizzando un generico valore x al posto del valore particolare 3:

Per ottenere l'espressione analitica della funzione composta, ripetiamo il procedimento precedente utilizzando un generico valore x al posto del valore particolare 3:

$$f(x) = 2x - 1,$$

Per ottenere l'espressione analitica della funzione composta, ripetiamo il procedimento precedente utilizzando un generico valore x al posto del valore particolare 3:

$$f(x) = 2x - 1,$$

$$g(f(x)) = g(2x - 1)$$

Per ottenere l'espressione analitica della funzione composta, ripetiamo il procedimento precedente utilizzando un generico valore x al posto del valore particolare 3:

$$f(x) = 2x - 1,$$

$$g(f(x)) = g(2x - 1) = -(2x - 1)^2 + 3$$

Per ottenere l'espressione analitica della funzione composta, ripetiamo il procedimento precedente utilizzando un generico valore x al posto del valore particolare 3:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - 1, \\ g(f(x)) &= g(2x-1) = -(2x-1)^2 + 3 \\ &= -4x^2 - 1 + 4x + 3 \end{aligned}$$

Per ottenere l'espressione analitica della funzione composta, ripetiamo il procedimento precedente utilizzando un generico valore x al posto del valore particolare 3:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - 1, \\ g(f(x)) &= g(2x-1) = -(2x-1)^2 + 3 \\ &= -4x^2 - 1 + 4x + 3 = -4x^2 + 4x + 2. \end{aligned}$$

In generale, date due funzioni:

In generale, date due funzioni:

$$f : A \to B \quad \text{e} \quad g : B \to C,$$

In generale, date due funzioni:

$$f : A \to B \quad \text{e} \quad g : B \to C,$$

comporre le due funzioni significa considerare una terza funzione, detta **funzione composta** mediante f e g, che associa a ogni elemento di A un elemento di C nel seguente modo:

In generale, date due funzioni:

$$f : A \to B \quad \text{e} \quad g : B \to C,$$

comporre le due funzioni significa considerare una terza funzione, detta **funzione composta** mediante f e g, che associa a ogni elemento di A un elemento di C nel seguente modo:

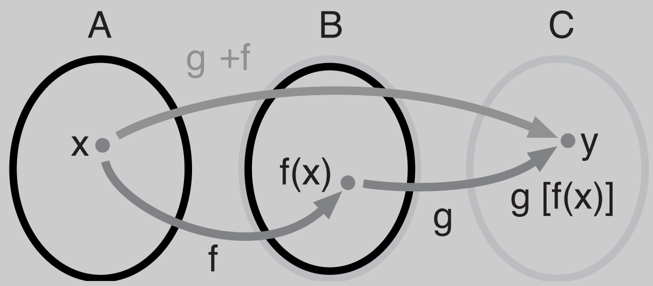
- a $x \in A$ corrisponde, mediante f, l'elemento $f(x) \in B$;

In generale, date due funzioni:

$$f : A \to B \quad \text{e} \quad g : B \to C,$$

comporre le due funzioni significa considerare una terza funzione, detta **funzione composta** mediante f e g, che associa a ogni elemento di A un elemento di C nel seguente modo:

- a $x \in A$ corrisponde, mediante f, l'elemento $f(x) \in B$;
- a $f(x) \in B$ corrisponde, mediante g, l'elemento $g(f(x)) \in C$


A
B
C
g +f
x
f(x)
y
g [f(x)]
f
g

Se si compone una funzione $f : A \longrightarrow B$ con la sua inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$ si ottiene la funzione **identità**, che associa a ogni elemento di un insieme se stesso.

Se si compone una funzione $f : A \to B$ con la sua inversa $f^{-1} : B \to A$ si ottiene la funzione **identità**, che associa a ogni elemento di un insieme se stesso. In simboli:

Se si compone una funzione $f : A \to B$ con la sua inversa $f^{-1} : B \to A$ si ottiene la funzione **identità**, che associa a ogni elemento di un insieme se stesso. In simboli:

$$f^{-1} \circ f : A \to A;$$

Se si compone una funzione $f : A \to B$ con la sua inversa $f^{-1} : B \to A$ si ottiene la funzione **identità**, che associa a ogni elemento di un insieme se stesso. In simboli:

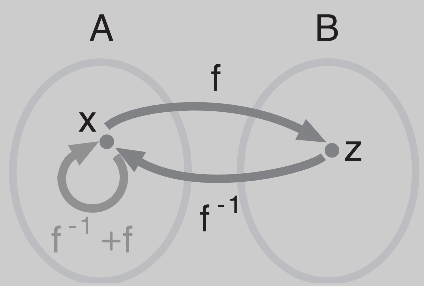
$$f^{-1} \circ f : A \to A;$$

$$f^{-1} \circ f : x \mapsto x\,.$$

Se si compone una funzione $f : A \rightarrow B$ con la sua inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ si ottiene la funzione **identità**, che associa a ogni elemento di un insieme se stesso. In simboli:

$$f^{-1} \circ f : A \longrightarrow A;$$

$$f^{-1} \circ f : x \longmapsto x\,.$$



La funzione composta viene indicata con la scrittura $f \circ g$, che si legge "g composto f"

La funzione composta viene indicata con la scrittura $f \circ g$, che si legge "g composto f" oppure " prima f poi g"

La funzione composta viene indicata con la scrittura $f \circ g$, che si legge "g composto f" oppure " prima f poi g"

$$g \circ f : A \to C$$

La funzione composta viene indicata con la scrittura $f \circ g$, che si legge "g composto f" oppure " prima f poi g"

$$g \circ f : A \to C$$

Tuttavia, spesso scriveremo:

La funzione composta viene indicata con la scrittura $f \circ g$, che si legge "g composto f" oppure " prima f poi g"

$$g \circ f : A \to C$$

Tuttavia, spesso scriveremo:

$$y = g(f(x))$$

La funzione composta viene indicata con la scrittura $f \circ g$, che si legge "g composto f" oppure " prima f poi g"

$$g \circ f : A \to C$$

Tuttavia, spesso scriveremo:

$$y = g(f(x))$$

che si legge"y uguale a g di f di x"

La funzione composta viene indicata con la scrittura $f \circ g$, che si legge "g composto f" oppure " prima f poi g"

$$g \circ f : A \to C$$

Tuttavia, spesso scriveremo:

$$y = g(f(x))$$

che si legge"y uguale a g di f di x"

In generale si ha:

La funzione composta viene indicata con la scrittura $f \circ g$, che si legge "g composto f" oppure " prima f poi g"

$$g \circ f : A \longrightarrow C$$

Tuttavia, spesso scriveremo:

$$y = g(f(x))$$

che si legge"y uguale a g di f di x"

In generale si ha:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

La funzione composta viene indicata con la scrittura $f \circ g$, che si legge "g composto f" oppure " prima f poi g"

$$g \circ f : A \to C$$

Tuttavia, spesso scriveremo:

$$y = g(f(x))$$

che si legge"y uguale a g di f di x"

In generale si ha:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

ossia la composizione delle funzioni **non** è commutativa.

Esempio Consideriamo ancora:

Esempio Consideriamo ancora:

$$f(x) = 2x - 1\,, \qquad g(x) = -x^2 + 3$$

Esempio Consideriamo ancora:

$$f(x) = 2x - 1\,, \qquad g(x) = -x^2 + 3$$

Si ha $g(f(3)) = -22$

Esempio Consideriamo ancora:

$$f(x) = 2x - 1\,, \qquad g(x) = -x^2 + 3$$

Si ha $g(f(3)) = -22$ ma $f(g(3)) = -13$

Esempio Consideriamo ancora:

$$f(x) = 2x - 1\,, \qquad g(x) = -x^2 + 3$$

Si ha $g(f(3)) = -22$ ma $f(g(3)) = -13$

In generale

Esempio Consideriamo ancora:

$$f(x) = 2x - 1\,, \qquad g(x) = -x^2 + 3$$

Si ha $g(f(3)) = -22$ ma $f(g(3)) = -13$

In generale

$$(f \circ g)\,(x) = f(g(x)) = -2x^2 + 5$$

Esempio Consideriamo ancora:

$$f(x) = 2x - 1\,, \qquad g(x) = -x^2 + 3$$

Si ha $g(f(3)) = -22$ ma $f(g(3)) = -13$

In generale

$$(f \circ g)\,(x) = f(g(x)) = -2x^2 + 5$$

$$(g \circ f)\,(x) = g(f(x)) = -4x^2 + 4x + 2$$

Definizione Consideriamo D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che se $x \in D$ allora $-x \in D$.

Definizione Consideriamo D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che se $x \in D$ allora $-x \in D$.

La funzione $y = f(x)$ si dice **pari** in D se $f(-x) = f(x)$ per qualunque x appartenente a D.

Definizione Consideriamo D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che se $x \in D$ allora $-x \in D$.

La funzione $y = f(x)$ si dice **pari** in D se $f(-x) = f(x)$ per qualunque x appartenente a D.

$y = x^2 + x^4 + x^6$ è pari

Definizione Consideriamo D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che se $x \in D$ allora $-x \in D$.

La funzione $y = f(x)$ si dice **pari** in D se $f(-x) = f(x)$ per qualunque x appartenente a D.

$y = x^2 + x^4 + x^6$ è pari $y = x + x^4 + x^6$ non è pari

Definizione Consideriamo D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che se $x \in D$ allora $-x \in D$.

La funzione $y = f(x)$ si dice **pari** in D se $f(-x) = f(x)$ per qualunque x appartenente a D.

$y = x^2 + x^4 + x^6$ è pari $y = x + x^4 + x^6$ non è pari

Se una funzione ha espressione analitica contenente soltanto potenze della x con *esponente pari*, allora è pari.

Definizione Consideriamo D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che se $x \in D$ allora $-x \in D$.

La funzione $y = f(x)$ si dice **pari** in D se $f(-x) = f(x)$ per qualunque x appartenente a D.

$y = x^2 + x^4 + x^6$ è pari $y = x + x^4 + x^6$ non è pari

Se una funzione ha espressione analitica contenente soltanto potenze della x con *esponente pari*, allora è pari. I termini noti dei polinomi sono i coefficienti di potenze a grado zero e quindi sono da considerarsi potenza pari